

חשבון אינפיניטסימלי

פרק 2 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות 1
3. חישוב גבול לפי אוילר 3
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ' 4
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש 6
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית 7
7. חישוב גבול לפי ההגדרה 9

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (4)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2 + 4n + 1} \quad (20)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (22)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (21)$$
- * רמז לשאלה 22: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|--|-----------------------|
| 4 (2 | 0 (1 |
| 0 (4 | ∞ (3 |
| 1 (6 | -5 (5 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8 | 1.5 (7 |
| 4 (10 | 0.25 (9 |
| $\ln 3$ (12 | 2 (11 |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13 |
| (14 $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$ | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16 | 2.5 (15 |
| 0.5 (18 | 0.5 (17 |
| 0.5 (20 | $\frac{a-b}{2}$ (19 |
| 1 (22 | $\frac{1}{3}$ (21 |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) \quad (5)$$

רמז לשאלה 4: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(6) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0 :

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \cdots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

(7) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{x^2 n^2}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$.

$$(8) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$

תשובות סופיות

- (1) 4
- (2) 0
- (3) 1
- (4) 0
- (5) 1
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) 9

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } x_1 > 0, a > 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^2 + 6)$, לכל n .
א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1.$$

נגדיר $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, לכל n .
הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(7) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים.
בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

(1) הגבול 2.

(2) הגבול 1.

(3) הגבול 1.

(4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.

ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il